



მაგიდა № 12

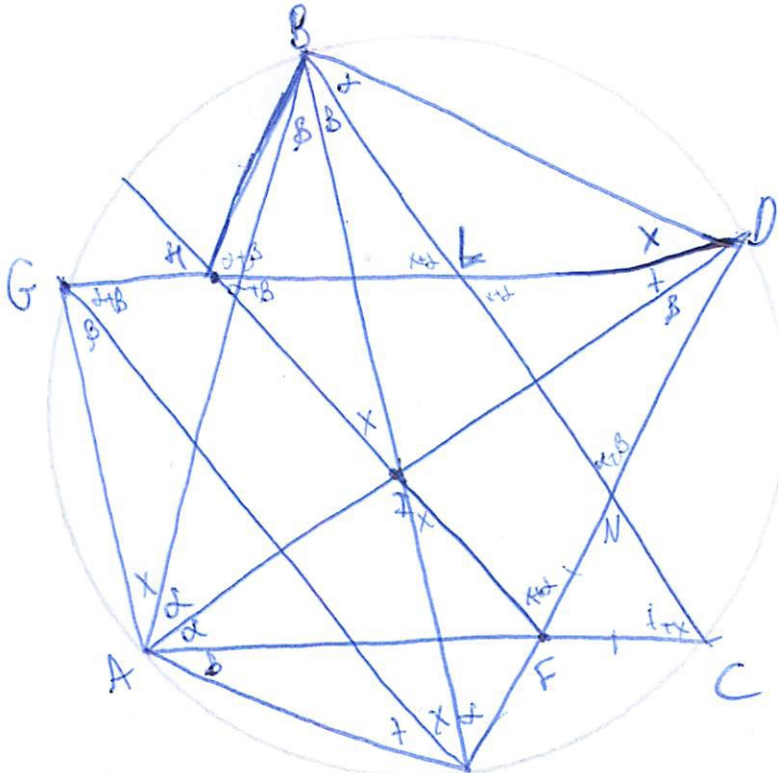
25.04.2015/ მათ/III/ 618

ამოცანა №

1

გვერდი №

5



$$\angle BAC = 2\alpha; \angle ABC = 2\beta; \angle GDA = \gamma; \angle GEB = x.$$

ჩვენ $GE \parallel FI \Rightarrow \angle DHF = \angle DGE = \alpha + \beta.$

$$\angle DBC = \frac{\widehat{DC}}{2} = \alpha; \angle CBE = \beta \text{ (მათაშორის } BE) \Rightarrow \angle PBE = \angle DHF$$

მათაშორის $HBDI$ -ში $\angle BHI = \angle DBI$ და $\angle DHI$ უცვლელია DI ხაზის მიხედვით \Rightarrow
 $\Rightarrow HBDI$ ტოლკუთხედი; $\angle BHD = \angle BID$; $\angle BDH = \angle HIB = x.$

$\triangle BFD$ -ში $\angle BFD = 180 - \alpha - \beta - x - \gamma$; მათაშორის $\triangle GAE$ -ში $\angle GAE + \angle EDG = 180^\circ =$
 $= (\alpha + \beta + x + \gamma) + \alpha + \beta = 180 \Rightarrow \alpha + \beta + x + \gamma = 180 - (\alpha + \beta).$

ჩვენ $\angle BID = 180 - (\alpha + \beta + x + \gamma) \Rightarrow \angle BID = 180 - (180 - (\alpha + \beta)) = \alpha + \beta = \angle BHD.$



შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 56-ე საერთაშორისო
ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

25.04.2015/ მათ/III/ 618

ამოცანა №

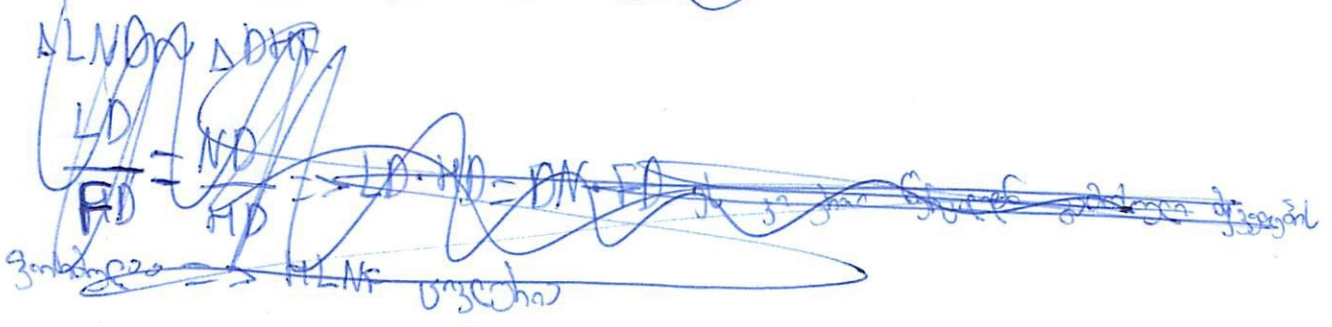
1

გვერდი №

6.

$\angle BLC = \frac{\widehat{GB} + \widehat{CD}}{2} = x + \alpha = \angle BLH$ $\angle DLN = \frac{\widehat{GB} + \widehat{DC}}{2} = x + \alpha$
 $\angle LND = \frac{\widehat{BD} + \widehat{EC}}{2} = \alpha + \beta = \angle BHL$ $\angle DNL = \frac{\widehat{BD} + \widehat{CE}}{2} = \alpha + \beta$

$\angle FNE = \angle LND = \alpha + \beta$
 $\angle NFE = \angle DC + \angle EC = \alpha + \beta$



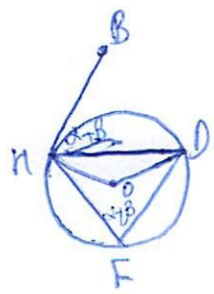
$\triangle LND \sim \triangle EGD \Rightarrow \frac{DL}{DE} = \frac{ND}{GD} \Rightarrow DL \cdot GD = DN \cdot DE$ ეს კი

ანუ წიგნების უმჯობესი უკვე აღსანიშნავია $\Rightarrow GHFE$ სწორკუთხა \Rightarrow
 $\angle EGH + \angle HFE = 180^\circ$

$\alpha + \beta + 180 - x - \alpha = 180 \Rightarrow \beta = x \Rightarrow \angle HFD = x + \alpha = \beta + \alpha = \angle BHD$

ხედავთ $\angle BHD = \angle DFH$ BH ანუ $\triangle DFH$ -ს უმჯობესი წიგნით მდებარე.

დამატებითი



$\angle HOD = 2(\alpha + \beta) \Rightarrow \angle OHD = \frac{180 - 2(\alpha + \beta)}{2} = 90 - (\alpha + \beta) \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle BHD + \angle OHD = \alpha + \beta + 90 - (\alpha + \beta) = 90^\circ \Rightarrow \angle BHO = 90^\circ$ და ანუ
 $BH \perp HO$ ხ.ე.წ.



მაგიდა № 12

25.04.2015/ მათ/III/ 618

ამოცანა № 2

გვერდი № 3

~~დავუშვათ $\frac{1}{2} < a < b$. ვიძებნოთ a_n და b_n რიცხვები~~
~~რომლებიც $a_n < b_n$ და $a_n < a_{n+1}$~~

დავუშვათ $\frac{1}{2} < a < b < 1$.

დავუშვათ იმ შემთხვევაში, როცა a_n ვსვამთ $\frac{1}{2}$ -ზე ნაკლები. სხვათა შორის a_n ვსვამთ $\frac{1}{2}$ -ზე ნაკლები და b_{n+1} ვსვამთ $\frac{1}{2}$ -ზე მეტი, ეს შემთხვევა მოხერხდება, რადგან

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2} \text{ და } b_{n+1} - b_n < 0. \text{ მაგრამ ნათქვამია } a_n < b_n.$$

დავუშვათ, რომ ვსვამთ a_n და b_n n -სთვის.

დავუშვათ სწორედ ისე, რომ $a_n < b_n$. მაშინ ყოველი a_n -ს b_n -სთვის ვსვამთ

$$a_n = \frac{a_{n-1}^2}{b_{n-1}} \text{ და } b_n = \frac{b_{n-1}^2}{a_{n-1}}$$

თუ a და b ტოლია ანა და ანაშენი რიცხვები ვაჩვენებთ, ხდება, როცა a_n და b_n ტოლია ყველა n -სთვის. მაშინ a_n და b_n ვსვამთ $\frac{1}{2}$ -ზე მეტი, ანუ ვსვამთ a_n და b_n , სე და ანაშენი რიცხვები ვაჩვენებთ $\frac{1}{2}$ -ზე მეტი, ანუ

დავუშვათ ვსვამთ a_n და b_n n -სთვის

ესევე ანუ ვსვამთ ვსვამთ a_n და b_n n -სთვის, რომ $a_n = a_{n-1} + \frac{1}{2}$ და

$$b_n = b_{n-1}^2 \text{ და ანუ ვსვამთ } (a_n - a_{n-1})(b_n - b_{n-1}) = \frac{1}{2}(b_{n-1}^2 - b_{n-1}) < 0.$$



შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 56-ე საერთაშორისო
ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 12

25.04.2015/ მათ/III/ 618

ამოცანა №

2

გვერდი №

4

თუ $\frac{1}{2} < a < b < \frac{1}{2}$ იგუვან მიხედვით, ჩვენ მიხედვით ნებისა შემთხვევაში. ავიღებთ a და b და
მიხედვით $\frac{1}{2}$ და იგუვან, ხოლო იგივე $\frac{1}{2} < a < b < \frac{1}{2}$.

თუ $a < \frac{1}{2}$ და $b > \frac{1}{2}$.

$a_1 = a + \frac{1}{2} > a$ და $b_1 = b^2 < b$. და შესაძლებელია უთხრობა:

$$(a_1 - a)(b_1 - b) < 0.$$



მაგიდა № 12

25.04.2015/ მათ/III/ 618

ამოცანა № 3

გვერდი № 1

$$7x^3 - 13xy + 7y^2 = (x-y+1)^3$$

ღვაწვია $x > y$.

$$7x^3 - 13xy + 7y^2 = (x-y)^3 + 3(x-y)^2 + 3(x-y) + 1 = (x-y)^3 + 3x^2 - 6xy + 3y^2 + 3(x-y) + 1$$

$$4x^2 - 7xy + 4y^2 = (x-y)^3 + 3(x-y) + 1$$

$$4(x-y)^2 + xy = (x-y)^3 + 3(x-y) + 1$$

$$xy = (x-y)((x-y)^2 - 4(x-y) + 3) + 1 = (x-y)(x-y-3)(x-y-1) + 1$$

ღვაწვია $t = x-y > 0$.

~~$$x \cdot x = t + y$$~~

$$y(t+y) - t(t-1)(t-3) - 1 = 0$$

$$y^2 + ty - (t(t-1)(t-3) + 1) = 0$$

$$D = t^2 + 4(t(t-1)(t-3) + 1) = 4t^3 - 15t^2 + 12t + 4 = 4t(t-2)^2 + (t-2)^2 = (t-2)^2(4t+1) = t^2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 4t+1$ უნდა იყოს სხელი კვადრეტი $\Rightarrow 4t+1 = p^2$ სადა p უნდა იყოს.

$$\Rightarrow t = \frac{p^2 - 1}{4}$$

$$y_1 = \frac{-t \pm \sqrt{D}}{2} = \frac{-t + (t-2)\sqrt{4t+1}}{2} = \frac{-\frac{p^2-1}{4} + \frac{p^2-9}{4} \cdot p}{2} = \frac{p^3 - p^2 + 9p + 1}{8}$$

ღვაწვია, რომ ნებისმიერ მათ p -სთვის y -ს მდებარეობს.

$y = \frac{-t + (t-2)\sqrt{4t+1}}{2}$ ან t უნდა იყოს $(t-2)$ -ს კენტი და $\sqrt{4t+1}$ ადვილად უნდა იყოს, ანუ $(4t+1) \equiv 1 \pmod{4}$ და $4t+1$ უნდა იყოს 2 -ზე. ან t უნდა იყოს, $t-2$ -ს ღარი და $(4t+1) \equiv 2 \pmod{4} \Rightarrow y$ უფრო მეტი მდებარეობს.

$$y_2 = \frac{-t - (t-2)\sqrt{4t+1}}{2} = \frac{-\frac{p^2-1}{4} - \frac{p^2-9}{4} \cdot p}{2} = \frac{-p^3 - p^2 + 9p + 1}{8}$$

სხვა მდებარეობა y -ს მდებარეობს.



შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 56-ე საერთაშორისო
ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 12

25.04.2015/ მათ/III/ 618

ამოცანა №

3

გვერდი №

2

$$y_1 = \frac{p^3 - p^2 - 9p + 1}{8} \quad t = \frac{p^2 - 1}{4} \Rightarrow x = y + t = \frac{p^3 - p^2 - 9p + 1}{8} + \frac{p^2 - 1}{4} = \frac{p^3 + p^2 - 9p - 1}{8}$$

$$y_2 = \frac{-p^3 - p^2 + 9p + 1}{8} \Rightarrow x = y + t = \frac{-p^3 - p^2 + 9p + 1}{8} + \frac{p^2 - 1}{4} = \frac{-p^3 + p^2 + 9p - 1}{8}$$

ი. ნაკი $\left(\frac{p^3 + p^2 - 9p - 1}{8}; \frac{p^3 - p^2 - 9p + 1}{8} \right)$ ii ნაკი $\left(\frac{-p^3 + p^2 + 9p - 1}{8}; \frac{-p^3 - p^2 + 9p + 1}{8} \right)$.

სადა p ნაკი.

აუ $x < y$ ძველია ამავე მხეს ორივე x -სა და y -ს აქვს ღარი მხელი,
ხელს ვიღობთ მხეცხვ მხეც ხეცხვით x და y -ს მიხედვით.